TEMA 6

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

6.1. *INTRODUCCIÓN*

- Def: Modelos que representan el comportamiento de diferentes modelos aleatorios que aparecen en el mundo real.
- Nota: cada uno tiene sus propios parámetros que los identifican.

6.2. *MODELOS DISCRETOS ELEMENTALES*

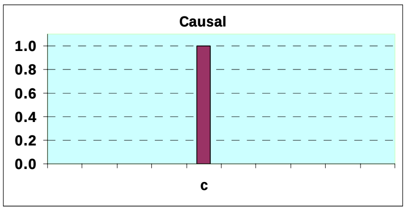
6.2.1. *DISTRIBUCIÓN DEGENERADA O CAUSAL*

- Dominio

x=c

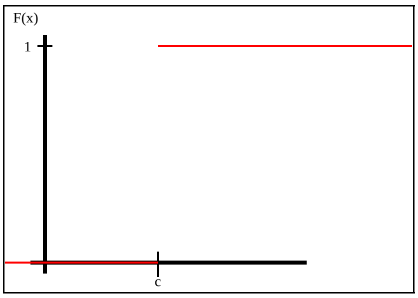
- Distribución de probabilidad

$$\begin{cases} P(\xi = c) = 1 \\ P(\xi \neq c) = 0 \end{cases}$$



- Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$



- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi) = c \\ V(\xi) = 0 \end{cases}$$

- Función característica

$\varphi(t) = E(e^{itc}) = e^{itc}$

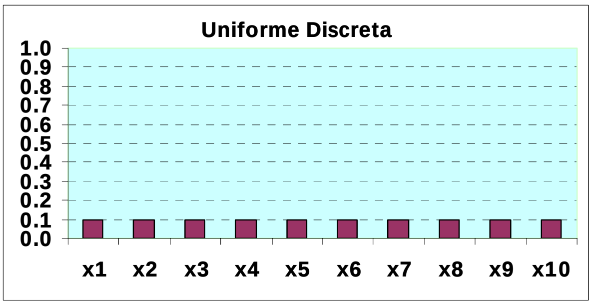
6.2.2. *DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA*

- Dominio

  n valores x_i

- Distribución de probabilidad

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n} \qquad i = 1,\dots,n$$



- Función de distribución

$$F(x_k) = P(\xi \le x_k) = \frac{k}{n} \qquad i = 1,\dots,k,\dots,n$$

- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi) = \dfrac{\sum_i x_i}{n} \\ V(\xi) = \dfrac{\sum_i x_i^{\,2}}{n} - (E(\xi))^2 \end{cases}$$

- Función característica

$$\varphi(t) = \sum_i e^{itx_i}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_i e^{itx_i}$$

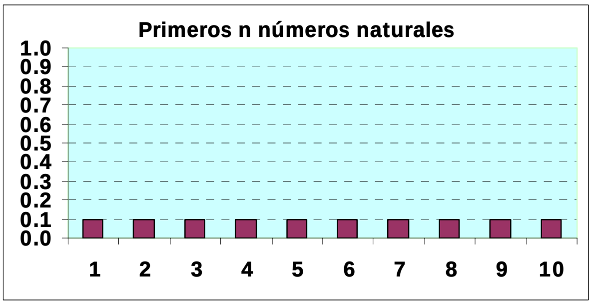
CASO PARTICULAR: $x_j=j$ (Primeros n números naturales)

- Dominio

  n primeros números naturales

- Distribución de probabilidad

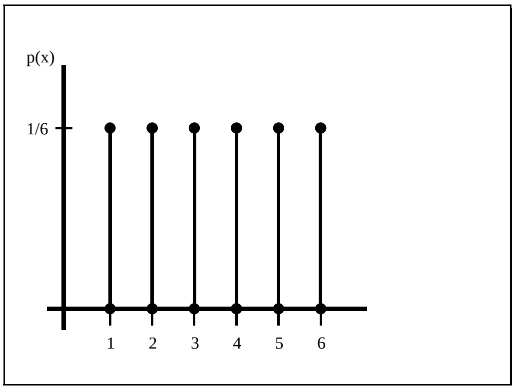
$$P(\xi = x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1,\dots,n$$

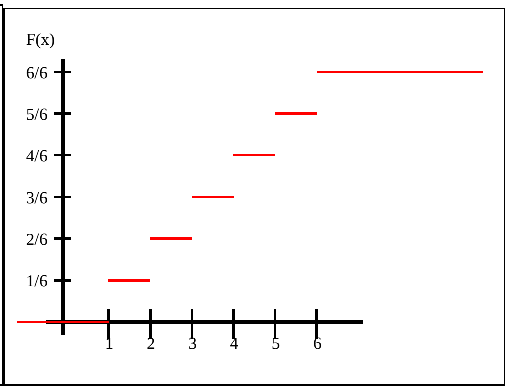


- Función de distribución

$$F(x) = P(\xi \le x) = \frac{j}{n} \qquad j = 1,\ldots,n$$

Ej: Un dado





- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi) = \dfrac{\sum_i x_i}{n} = \dfrac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = \dfrac{1}{n}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2} \\ V(\xi) = \dfrac{\sum_i x_i^{\,2}}{n} - (E(\xi))^2 = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 \\ \qquad = \dfrac{2n^2+n+2n+1}{6} - \dfrac{n^2+2n+1}{2} = \dfrac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} = \dfrac{n^2-1}{12} \end{cases}$$

- Función característica

$$\varphi(t) = \frac{1}{n}\sum_i e^{itx_i} = \frac{1}{n}\frac{e^{itn}e^{it} - e^{it1}}{e^{it}-1} = \frac{e^{it}\left(e^{itn}-1\right)}{n\left(e^{it}-1\right)}$$

- Ejemplo: Calcular los momentos de una distribución discreta uniforme que incluye los números naturales entre 0 y 10 ambos inclusive

$$\eta \to P(\xi = y) = \frac{1}{n} \qquad y = 0,\ldots,10$$

$$\varepsilon \to P(\xi = x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1,\ldots,11$$

$\eta=\varepsilon-1$

$E(\eta)=E(\varepsilon-1)=E(\varepsilon)-1=\dfrac{11+1}{2}-1=5$

$V(\eta)=V(\varepsilon-1)=V(\varepsilon)=\dfrac{11^2-1}{12}=10$

6.3. *DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (0,1) Ó DE BERNOULLI*

- Definición

Suceso dicotómico en el que se realiza una prueba con probabilidad de éxito *p*

- Dominio

x=A (x=1, éxito)

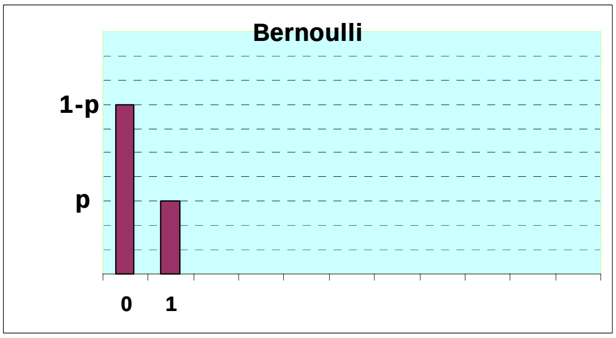
x=A* (x= $\overline{A}$, x=0, fracaso)

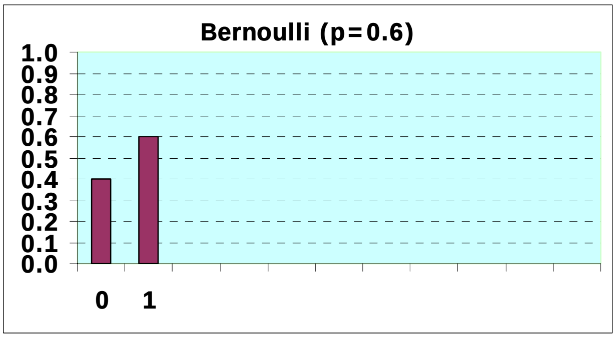
- Representación B(0,1)≡B(1,p)
- Distribución de probabilidad

$$\begin{cases} P(\xi = A) = p = P(x=1) \\ P(\xi = A^*) = 1-p = q = P(x=0) \end{cases}$$

que se puede resumir en:

$$P(\xi = x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1$$





- Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi) = 0 * (1-p) + 1 * (p) = p \\ V(\xi) = 0^2 * (1-p) + 1^2 * (p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \end{cases}$$

- Función característica

$$\varphi(t) = e^{ito} * (1-p) + e^{it1} * (p) = (1-p) + e^{it1} * (p) = q + pe^{it}$$

- Ejemplo: ξ="aprobar un examen", p=0.8

  $\xi \rightarrow B(1,0.8)$

  $P(\xi=x)=0.8^x\ 0.2^{1-x}$

  $E(\xi)=0.8$

  $V(\xi)=0.8*0.2=0.16$

6.4. *DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (n,p)*

- Definición
  - Repetición *n* veces independientes del mismo suceso dicotómico en el que se realiza una prueba con probabilidad de éxito *p*
  - *Nota: n dada y finita; p constante*
  - Suma de n B(1,p)

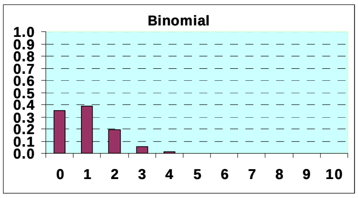
    $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$

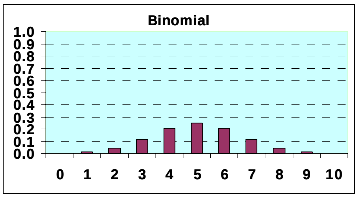
    $\xi_i \rightarrow$iid B(1,p); **i**ndependientes e **i**dénticamente **d**istribuidas
  - Ejemplo: ξ="número de asignaturas a aprobar en este cuatrimestre, todas con la misma probabilidad de éxito"
- Dominio

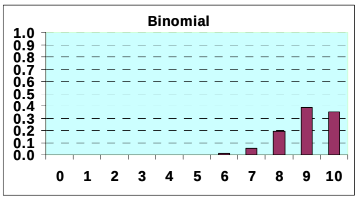
  x={0,1,…,n}
- Representación B(n,p)
- Distribución de probabilidad

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = \{0,1\ldots,n\}$$

Nota: $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$ y 0!=1







n=10, p=0.1 n=10, p=0.5 n=10, p=0.9

Unimodal o Bimodal en función de p

  - Ejemplo: ξ="número de asignaturas a aprobar en este cuatrimestre, todas con la misma probabilidad de éxito de 0.8, si la matrícula consta de 7 asignaturas

    x=0,1,…,7

$$P(\xi = x) = \binom{7}{x} 0.8^x 0.2^{7-x} \quad x = \{0,1\ldots,7\}$$

$$P(\xi=0)=\binom{7}{0}0.8^0 0.2^{7-0}=\frac{7!}{0!(7-0)!}1*0.2^7=1*1*0.2^7 = 0.0000128$$

Nota: significa suspender todas (xxxxxxx)

P(suspender todas)=0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2=0.2^7

$$P(\xi=1)=\binom{7}{1}0.8^1 0.2^{7-1} = 0.0003584$$

Nota: significa aprobar una y sólo 1

(oxxxxxx)	Prob=0.8*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xoxxxxx)	Prob=0.2*0.8*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xxoxxxx)	Prob=0.2*0.2*0.8*0.2*0.2*0.2*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xxxoxxx)	Prob=0.2*0.2*0.2*0.8*0.2*0.2*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xxxxoxx)	Prob=0.2*0.2*0.2*0.2*0.8*0.2*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xxxxxox)	Prob=0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.8*0.2=$0.8^1*0.2^6$
(xxxxxxo)	Prob=0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.2*0.8=$0.8^1*0.2^6$

P(aprobar 1)=$7*0.8^1*0.2^6$

$$P(\xi=2)=\binom{7}{2}0.8^2 0.2^{7-2} = 0.00430$$

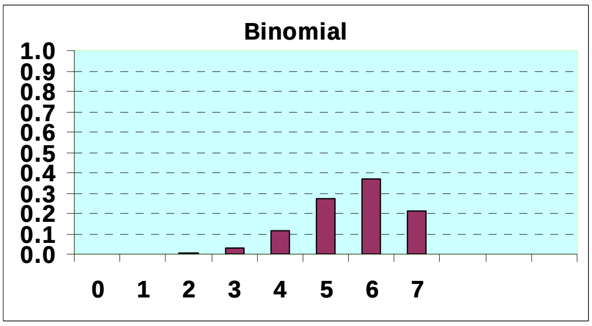
$$P(\xi=3)=\binom{7}{3}0.8^3 0.2^{7-3} = 0.0287$$

$$P(\xi=4)=\binom{7}{4}0.8^4 0.2^{7-4} = 0.1147$$

$$P(\xi=5)=\binom{7}{5}0.8^5 0.2^{7-5} = 0.2753$$

$$P(\xi=6)=\binom{7}{6}0.8^6 0.2^{7-6} = 0.3670$$

$$P(\xi=7)=\binom{7}{7}0.8^7 0.2^{7-7} = 0.2097$$



n=7, p=0.8

Nota: $\sum P(\xi=x)=\sum\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=(p+q)^n=1^n=1$

- Función de distribución

$$F(x_j) = P(\xi \le x_j) = \sum_{i=0}^{j} P(\xi = x_i)$$

  - Ejemplo: ξ="número de asignaturas a aprobar en este cuatrimestre, todas con la misma probabilidad de éxito de 0.8, si la matrícula consta de 7 asignaturas

    P(aprobar 5 o más) = 0.2753+0.3670+0.2097=0.8520

    P(aprobar más de 1)=1-0.0000128-0.0003584=1-0.0000-0.0004=0.9996

- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi) = E\left[\sum_i B(1,p)\right] = \sum_i E[B(1,p)] = \sum_i p = np \\ V(\xi) = V\left[\sum_i B(1,p)\right] = \sum_i V[B(1,p)] = \sum_i pq = npq \end{cases}$$

- Función característica

$$\varphi(t) = \varphi_{\sum B(1,p)}(t) = \prod_i \varphi_{B(1,p)}(t) = \left(q + pe^{it}\right)^n$$

- Ejemplo: ξ="aprobar exámenes en una convocatoria", n=7, p=0.8

  ξ→B(7,0.8)

  E(ξ)=7*0.8=5.6

  V(ξ)=7*0.8*0.2=1.12

- Moda

  np-q≤Mo(ξ)≤np+p

  Como (np+p)-(np+q)=1

  a. Si (np+p) y (np+q) no son enteros, una única moda
  b. Si (np+p) y (np+q) son enteros, dos modas

  Ejemplo:

  5.6-0.2≤Mo(ξ)≤5.6+0.8

  5.4≤Mo(ξ)≤6.4

  Mo(ξ)=6

- Propiedad aditiva: SÍ la cumple
  - Definición: Si se suman distribuciones binomiales con la misma *p*, nos da una binomial

    Si $\xi_1 \to B(n_1,p)$ y $\xi_2 \to B(n_2,p)$

    $\eta = \xi_1 + \xi_2 \to B(n_1+n_2,p)$

  - Demostración:

$$\varphi_\eta(t) = \varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) * \varphi_{\xi_2}(t) = \left(q + pe^{it}\right)^{n_1}\left(q + pe^{it}\right)^{n_2} = \left(q + pe^{it}\right)^{n_1+n_2}$$

- o Generalización:

  Si $\xi_i \rightarrow B(n_i,p)$

  $\tau=\Sigma\xi_i \rightarrow B(\Sigma n_i,p)$

- o Ejemplo:

  $\eta=\xi_1+\xi_2 \rightarrow B(14,0.8)$

  $$P(\eta=10)=\binom{14}{10}0.8^{10}0.2^{14-10}=0.1720$$

  $11.2-0.2 \leq Mo(\xi) \leq 11.2+0.8$

  $11 \leq Mo(\xi) \leq 12$

  $Mo(\xi)=11$ y 12

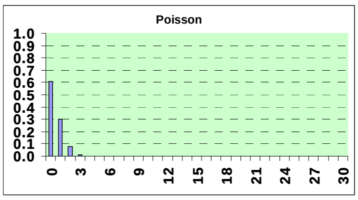
6.5. *DISTRIBUCIÓN POISSON PO(λ)*

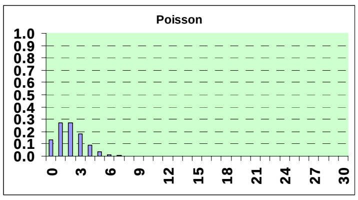
- Definición
  - o Suceso dicotómico que se realiza a lo largo del tiempo en el que se cuenta el número de éxitos
  - o *Nota: número de éxitos por unidad de tiempo, p constante, n grande*
  - o Poisson(λ) y $\lambda>0$
  - o Ejemplo: ξ="número de personas en tutoría por semana"
- Dominio

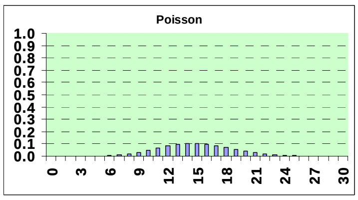
  $x=\{0,1,2, \ldots\}$
- Representación ξ=PO(λ)
- Distribución de probabilidad

$$P(\xi=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x=\{0,1,2,\ldots\}$$

Nota: $$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$







$\lambda=0.5$ $\lambda=2$ $\lambda=15$

Unimodal o Bimodal en función de λ; nunca asimétrica a la izquierda

- o Ejemplo: ξ="el número de personas que piden tutorías por semana es de 0.5"

  ξ=PO(0.5)

$$P(\xi=x)=\frac{e^{-0.5}0.5^x}{x!} \quad x=0,1,\ldots$$

$$P(\xi=0)=\frac{e^{-0.5}0.5^0}{0!}=.e^{-0.5}=0.6065$$

$$P(\xi=1)=\frac{e^{-0.5}0.5^1}{1!}=0.3033$$

$$P(\xi=2)=\frac{e^{-0.5}0.5^2}{2!}=0.0758$$

$$P(\xi\geq 3)=1-P(\xi\leq 2)=1-0.6065-0.3033-0.0758=0.0144$$

- Función de distribución
  - $F(x)=P(\xi\leq x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad x=\{0,1,2,...\}$
- Función característica
  - $\varphi(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{itx}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^{it}\lambda\right)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda}=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$
- Momentos

$$\begin{cases} E(\xi)=\frac{1}{i}\left|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{i}\left|\lambda ie^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)}\right|_{t=0}=\frac{1}{i}\lambda i=\lambda \\ V(\xi)=\frac{1}{i^2}\left|\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}-\lambda^2=\frac{1}{i^2}\left|\lambda i^2e^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)}+\lambda ie^{it}\lambda ie^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)}\right|_{t=0}-\lambda^2 \\ \qquad =\frac{1}{i^2}\left(\lambda i^2+\lambda^2 i^2\right)-\lambda^2=\lambda \end{cases}$$

- Ejemplo: ξ=”número de visitas”, λ=0.5

  ξ=PO(0.5)

  E(ξ)=0.5

  V(ξ)=0.5
- Si n$\to\infty$ y p$\to$0, B(n,p) $\to$ PO(λ=np)

  Orientativo: p$\leq$0.1, λ=np<5

  ξ=B(100,0.01) $\to$ η=PO(λ=1)

$$P(\xi=1)=\binom{100}{1}0.01^1 0.99^{100-1}=0.3697$$

$$P(\eta=1)=\frac{e^{-1}1^1}{1!}=0.3679$$

- Propiedad aditiva: SÍ la cumple
  - Definición: Si se suman distribuciones poisson nos da una poisson

    Si $\xi_j\to$PO(λ_j)

    $\tau=\Sigma\xi_j\to$PO($\Sigma\lambda_j$)

- Demostración: $\varphi_{\tau}(t) = \varphi_{\sum \xi_j}(t) = \prod \varphi_{\xi_{j1}}(t) = e^{\lambda_1\left(e^{it}-1\right)} e^{\lambda_{21}\left(e^{it}-1\right)} \dots e^{\lambda_n\left(e^{it}-1\right)}$
  $= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_n)\left(e^{it}-1\right)} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$

- Ejemplo: “número de visitas en dos semanas”

$\eta=\xi_1+\xi_2 \rightarrow PO(0.5+0.5)=1$

$$P(\eta = 0) = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 0.3679$$

$$P(\eta = 1) = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0.3679$$

$$P(\eta = 2) = \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 0.1839$$

$$P(\eta > 2) = 1 - 0.3679 - 0.3679 - 0.1839 = 0.0803$$